2.5.12 Další příklady na kvadratické rovnice a nerovnice

Předpoklady: 020501, 020503, 020504, 020508, 020511

Pedagogická poznámka: Hodina se skládá ze dvou částí (příklady 1- 4 a příklady 5 a 6). Zajímavost příkladu 6 spočívá v tom, že při řešení se řeší kvadratická nerovnice na dvou úrovních: při vytváření intervalů pro odstranění absolutní hodnoty a potom pří řešení vlastní nerovnice v jednotlivých intervalech. Žáci s tím mají obrovské problémy, jejíchž míra souvisí s tím, jak interpretují postupy obecně.

Př. 1: Vyřeš nerovnici: $\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2-4x+3\right)\leq 0$.

Dva kvadratické dvojčleny, rozložíme a najdeme kořeny:

$x^2+5x+6=\left(x+3\right)\left(x+2\right)\Rightarrow\ x_1=-3;x_2=-2$

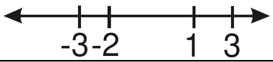
$x^2-4x+3=\left(x-1\right)\left(x-3\right)\Rightarrow\ x_1=1;x_2=3$

2 možnosti řešení:

1. rozklad na lineární členy a tabulka

$\left(x^2+5x+6\right)\left(x^2-4x+3\right)\leq 0$

$\left(x+3\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-3\right)\leq 0$

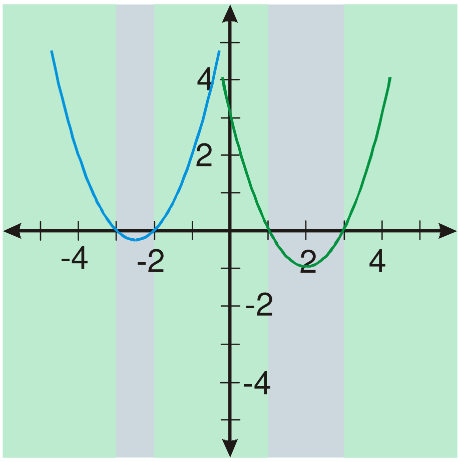


	$(-\infty;-3)$	$(-3;-2)$	$(-2;1)$	$(1;3)$	$(3;\infty)$
$(x+3)$	-	+	+	+	+
$(x+2)$	-	-	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	+	+
$(x-3)$	-	-	-	-	+
$(x+3)(x+2)(x-1)(x-3)$	+	-	+	-	+

$K=\langle -3;-2\rangle\cup\langle 1;3\rangle$

2. grafy funkcí a rozhodnutí o znaménku jejich součinu

Nakreslíme funkce $y=x^2+5x+6$ a $y=x^2-4x+3$.



V modrých částech grafu je právě jedna z funkcí záporná, jejich součin je pak také záporný a tato x jsou řešením nerovnice.

$K = \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 1; 3 \rangle$

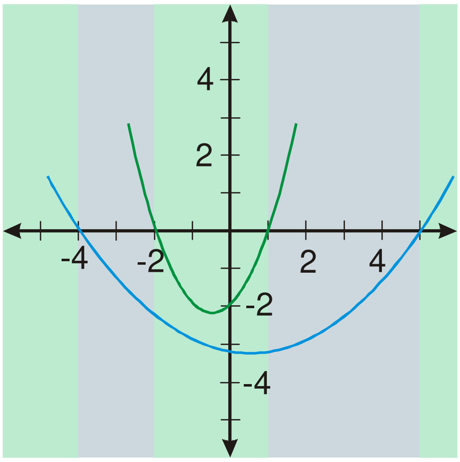
Př. 2: Vyřeš nerovnici: $\left(x^2 - x - 20\right)\left(x^2 + x - 2\right) \geq 0$ pomocí grafů kvadratických funkcí.

Dva kvadratické dvojčleny, rozložíme a najdeme kořeny:

$x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4) \Rightarrow x_1 = -4; x_2 = 5$

$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -2$

Nakreslíme funkce $y = x^2 - x - 20$ a $y = x^2 + x - 2$.

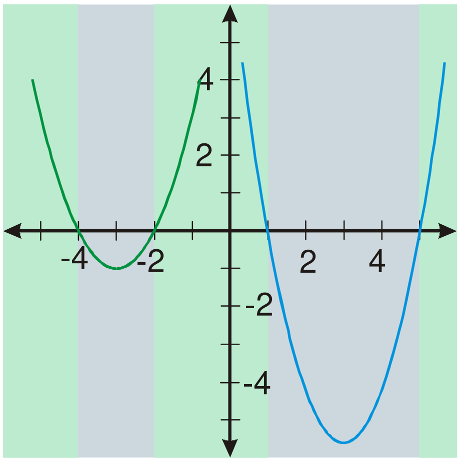


Protože zkoumáme součin dvou čísel, musíme si uvědomit, že součin je kladný, i když jsou obě čísla záporná. Proto do řešení patří i interval $\langle -2; 1 \rangle$.

$K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 5; \infty)$

Pedagogická poznámka: Předcházející příklad řeší studenti většinou takto $K = (-\infty; -4\rangle \cup \langle 5; \infty)$, předpokládají (špatně), že jakmile je jedna z funkcí záporná, je záporný i součin.

Pedagogická poznámka: Jedna studentka zjistila, že při zjišťování řešení můžeme používat i tento obrázek:



Po rozložení kvadratických trojčlenů na lineární můžeme závorky proházet a sestavit tak kvadratické trojčleny, které odpovídají funkcím na obrázku a které ukazují řešení názorněji.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^2-2x+|x+1|-3=0$.

Nic nového, překáží absolutní hodnota $\Rightarrow$ odstraníme ji pomocí intervalů.
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ? $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

-1 $\Rightarrow$ 2 intervaly

$x \in (-\infty;-1\rangle$ $\qquad x+1 \le 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1)$

Řešíme rovnici: $x^2-2x+|x+1|-3=0$

$x^2-2x-x-1-3=0$

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)(x+1)=0$

$x_1=4$, $x_2=-1$

-1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali, 4 mezi ně nepatří $\Rightarrow$ $K_1=\{-1\}$.

$x \in \langle -1;\infty)$ $\qquad x+1 \ge 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$

Řešíme rovnici: $x^2-2x+|x+1|-3=0$

$x^2-2x+x+1-3=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x_1=2$, $x_2=-1$

Obě čísla patří mezi čísla, se kterými jsme počítali $\Rightarrow$ $K_2=\{-1,2\}$.

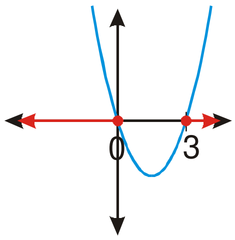
$K=K_1 \cup K_2=\{-1;2\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $|x^2-3x|+2x-2=0$.

Stejné jako předchozí příklad, překáží absolutní hodnota $\Rightarrow$ odstraníme ji pomocí intervalů.

Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)? Zjistíme to pomocí nerovnice $x^2-3x\geq 0$.
(teď neřešíme zadanou rovnici, jen zjišťujeme, jak se zbavit absolutní hodnoty)

$x(x-3)\geq 0 \qquad x_1=0,\ x_2=3$



Výraz $x^2-3x\geq 0$, právě když $x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 3;\infty)$.

Výraz $x^2-3x\leq 0$, právě když $x\in\langle 0;3\rangle$.

Konečně můžeme řešit rovnici:

$x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 3;\infty) \qquad x^2-3x\geq 0 \Rightarrow |x^2-3x|=x^2-3x$

Řešíme rovnici: $|x^2-3x|+2x-2=0$.

$x^2-3x+2x-2=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$x_1=2,\ x_2=-1$

-1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali, 2 mezi ně nepatří $\Rightarrow$ $K_1=\{-1\}$.

$x\in\langle 0;3\rangle \qquad x^2-3x\leq 0 \Rightarrow |x^2-3x|=-x^2+3x$

Řešíme rovnici: $|x^2-3x|+2x-2=0$.

$-x^2+3x+2x-2=0$

$-x^2+5x-2=0$

$x^2-5x+2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{2}\doteq 0{,}44,\ x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}\doteq 4{,}56$$

Kořen x_1 patří mezi čísla, se kterými jsme počítali, kořen x_2 mezi ně nepatří $\Rightarrow$

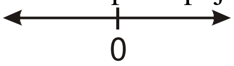
$$K_2=\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$K=K_1\cup K_2=\left\{-1;\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu je důležité, aby ho studenti nebrali jako něco nového, ale pouze jako další uplatnění již známé metody. Je potřeba hlídat, aby si při řešení kvadratické nerovnice neustále uvědomovali, že zrovna nepracují přímo na konečném cíli, ale dělají úkol, který s konečným cílem pouze souvisí. Jde vlastně o jakési vnořování se do podprogramů.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $x^2-3|x|+2>0$.

Nic nového, překáží absolutní hodnota $\Rightarrow$ odstraníme ji pomocí intervalů.
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje) ?



$\Rightarrow$ 2 intervaly

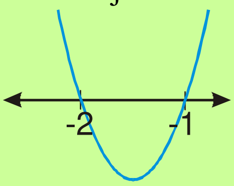
$x\in(-\infty;0\rangle$ $|x|=-x$

Řešíme nerovnici: $x^2-3(-x)+2>0$.

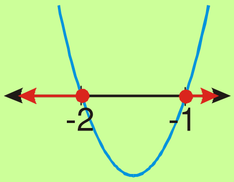
$x^2+3x+2>0$

Hledáme nulové body: $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)=0$, $x_1=-2$, $x_2=-1$.

Před x^2 je kladné číslo – „ďolík“



Hledáme body nad osou x $\Rightarrow$



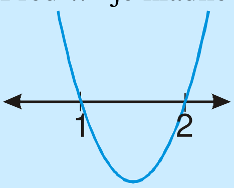
Počítali jsme pouze s čísly $x\in(-\infty;0\rangle$ $\Rightarrow$ $K_1=(-\infty;-2)\cup(-1;0\rangle$.

$x\in\langle 0;\infty)$ $|x|=x$

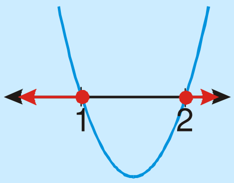
Řešíme nerovnici: $x^2-3x+2>0$

Hledáme nulové body: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$, $x_1=2$, $x_2=1$.

Před x^2 je kladné číslo – „ďolík“



Hledáme body nad osou x $\Rightarrow$



.

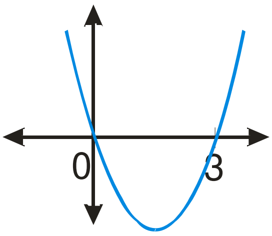
Počítali jsme pouze s čísly $x\in\langle 0;\infty)$ $\Rightarrow$ $K_2=\langle 0;1)\cup(2;\infty)$.

$K=K_1\cup K_2=(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;\infty)$

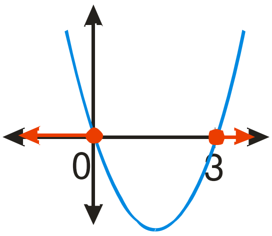
Př. 6: Vyřeš nerovnici $|x^2-3x|>x$.

Nic nového, překáží absolutní hodnota $\Rightarrow$ odstraníme ji pomocí intervalů.
Kdy číslo uvnitř absolutní hodnoty mění znaménko (a tedy i způsob, jakým k němu absolutní hodnota přistupuje)?
Uvnitř absolutní hodnoty je výraz x^2-3x $\Rightarrow$ řešíme nerovnici $x^2-3x\geq 0$.
Hledáme nulové body: $x^2-3x=x(x-3)=0$, $x_1=0$; $x_2=3$

Před x^2 je kladné číslo – „ďolík“



Hledáme body nad osou nebo na ose x $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ 2 cesty

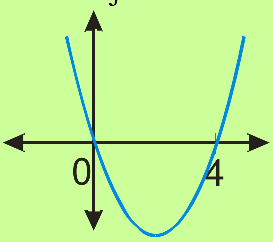
$x \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 3; \infty)$ $\qquad$ $|x^2 - 3x| = x^2 - 3x$

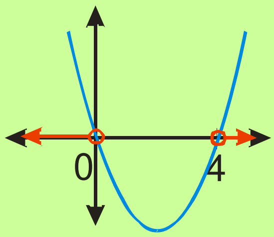
Řešíme nerovnici: $x^2 - 3x > x \quad / -x$.

$x^2 - 4x > 0$

Hledáme nulové body: $x^2 - 4x = x(x-4) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Před x^2 je kladné číslo – „ďolík“





Hledáme body nad osou x $\Rightarrow$

Všechna čísla, která „vychází“ patří mezi ta, se kterými jsme počítali $\Rightarrow$

$K_1 = (-\infty; 0) \cup (4; \infty)$.

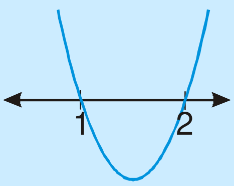
$x \in \langle 0; 3\rangle$ $\qquad$ $|x^2 - 3x| = -x^2 + 3x$

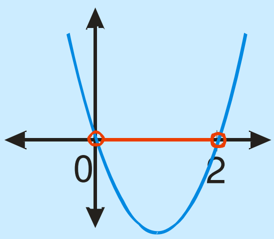
Řešíme nerovnici: $-x^2 + 3x > x \quad / +x^2 - 3x$

$0 > x^2 - 2x$

Hledáme nulové body: $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Před x je kladné číslo – „ďolík“





Hledáme body pod osou x $\Rightarrow$.

Všechna čísla, která „vychází“ patří mezi ta, se kterými jsme počítali $\Rightarrow$ $(0; 2)$.

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;0) \cup (0;2) \cup (4;\infty)$

Př. 7: Petáková:
strana 15/cvičení 22 t) u) v)
strana 15/cvičení 23 h) j)

Shrnutí: Nic nového jsme se nedozvěděli.